

ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ҚазҰУ ХАБАРШЫСЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК КазНУ

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№ 1 (93)

Алматы
«Қазақ университеті»
2017

Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного
согласия Республики Казахстан, свидетельство № 956-Ж от 25.11.1999 г.
(Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.). Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия

научный редактор – М.А. Бектемесов - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби;
заместитель научного редактора – А.Б. Кыдырбекулы – д. т. н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби;
ответственный секретарь – Г.М. Даирбаева – к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Алексеев А. – асс. профессор, Университет штата Калифорнии в Нортридж, США

Алиев Ф.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Азербайджана, Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан

Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., директор Департамента профессионального и технического образования МОН РК, Казахстан

Ахметов М. – доктор Ph.D., профессор, Средне Восточный Технический Университет, Турция

Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Гасников А.В. – д.ф.-м.н., Московский физико-технический институт, Россия

Джумадылдаев А.С. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК, Институт математики и математического моделирования, Казахстан

Жайнаков А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН КР, Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Кыргызстан

Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия

Калтаев А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Кангузин Б.Е. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Кудайбергенов К. – д.ф.-м.н., Казахстанский институт менеджмента, экономики и прогнозирования, Казахстан

Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института Аэродинамики, Германия

Малышкин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия

Мейрманов А.М. – д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, Россия

Милошевич Х. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Приштины, Сербия

Мухамбетжанов С.Т. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Отелбаев М.О. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан

Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания

Рысбайулы Б. – д.ф.-м.н., профессор, Международный университет информационных технологий, Казахстан

Садыбеков М.А. – д.ф.-м.н., член-корр. НАН РК, Институт математики и математического моделирования МОН РК, Казахстан

Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

Тукеев У.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Умирбаев У.У. – д.ф.-м.н., профессор, член-корр. НАН РК, Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва, Казахстан

Шиничи Накасука – доктор Ph.D., профессор, Университет Токио, Япония

Шокин Ю.И. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия

Юлдашев З.Х. – д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан

Научное издание

Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика, № 1(93) 2017.

Редактор – Г.М. Даирбаева. Компьютерная верстка – Б.А. Аетова

ИБ N 10758

Подписано в печать 29.03.2017 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 10,4 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ N 1333. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

© КазНУ им. аль-Фараби, 2017

УДК 512.56, 512.57

Сложность решеток квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов

Луцак С.М., докторант, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
г. Астана, Республика Казахстан, +77787149316, E-mail: sveta_lutsak@mail.ru

В работе выполнено исследование сложности строения решеток (относительных) квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов. Вопрос о том, что считать сложностью решетки квазимногообразий и какие решетки квазимногообразий являются сложными согласно той или иной мере сложности, а какие - нет, изучался многими авторами. Хорошо известны две меры сложности строения решеток квазимногообразий: иррациональность (невычислимость множества всех их конечных подрешеток) и Q -универсальность. Иррациональность решетки квазимногообразий означает, что не существует алгоритма, который по заданной конечной решетке определял бы, вложима эта решетка в рассматриваемую решетку квазимногообразий или нет. Другая мера сложности строения решеток квазимногообразий выражается понятием Q -универсальности. Это значит, что решетка квазимногообразий для любого квазимногообразия конечной сигнатуры является гомоморфным образом некоторой подрешетки рассматриваемой Q -универсальной решетки квазимногообразий. Два года назад была установлена связь между иррациональностью и Q -универсальностью и поставлена проблема. Верно ли, что любой Q -универсальный класс систем фиксированной сигнатуры содержит иррациональный подкласс? Существует ли не Q -универсальный класс, но, тем не менее, являющийся иррациональным? Автором доказана выполнимость нетривиального тождества на решетках квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов. Установлено, что существует континуум иррациональных классов дифференциальных группоидов, не являющихся Q -универсальными.

Ключевые слова: решетка квазимногообразий, иррациональность, Q -универсальность.

Дифференциалды группоидтер кластары үшін квазикөпбейне торлардың күрделілігі

Луцак С.М., докторант, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
Астана қ., Қазақстан Республикасы, +77787149316, Электрондық пошта: sveta_lutsak@mail.ru

Жұмыста дифференциалды группоидтер кластары үшін квазикөпбейне торлардың күрделілігіне (салыстырмалығына) зерттеу жасалды. Мәселе квазикөпбейне торлардың күрделілігі деп нені санау санау керек, және квазикөпбейне торлардың қайсысын күрделіліктің сол немесе басқа өлшеміне сәйкес күрделі болып табылады, ал қайсылары күрделі емес болып табылатынын көптеген авторлар зерттеген. Квазикөпбейне торлар күрделілігінің екі өлшемін жақсы білеміз: иррационалдығы (барлық төменгі торлары жиынтығының есептелмейтіні) және Q -әмбебаптығы. Квазикөпбейне торлардың иррационалдығы, тапсырылған соңғы торы бойынша осы тор қарастырылып жатқан квазикөпбейне торларына салынатынын анықтайтын алгоритмнің жоқ дегені. Квазикөпбейне торлар күрделілігінің екінші өлшемі Q -әмбебаптығы ұғымымен білдіріледі. Ол квазикөпбейне торы соңғы сигнатурасының кез келген квазикөпбейнелігі үшін қарастырылып жатқан квазикөпбейне тордың Q -әмбебаптығы қайсы бар төменгі торы гомоморфты бейне болып табылады дегені. Осыдан екі жыл бұрын иррационалдық пен Q -әмбебаптығы арасындағы байланысы анықтады және мәселе көтерілді. Белгіленген сигнатураны жүйелерінің кез келген Q -әмбебап класы иррационалдық төменгі класына ие болғаны дұрыс па? Q -әмбебап болып табылмайтын, бірақ, иррационалдық болып табылатын клас бар ма? Дифференциалды группоидтер кластары үшін квазикөпбейнелік торларында тривиалды емес тепе-теңдігінің орындалатынын дәлелдеді. Q -әмбебаптық болып табылмайтын дифференциалды группоидтердің иррационалдық кластарының континуумы бар болғаны анықталды.

Түйін сөздер: квазикөпбейне тор, иррационалдығы, Q -әмбебаптығы.

The complexity of quasivariety lattices for the classes of differential groupoids

Lutsak S.M., PhD student, the L.N. Gumilev Eurasian National University,
Astana, Kazakhstan, +77787149316, E-mail: sveta_lutsak@mail.ru

In this work we explore the complexity of structure of (relative) quasivariety lattices for the classes of differential groupoids. A question, what is the complexity of quasivariety lattice and what quasivariety lattices are complex according to this or that measure of complexity and which are not, studied by many authors. Two complexity measures of the structure of quasivariety lattices are known: unreasonability (non-computability the set of all finite sublattices of the quasivariety lattices) and Q -universality. Unreasonability of the quasivariety lattice means that there is no algorithm which would determine by the given finite lattice, this lattice is embeddable into the considered quasivariety lattice or not. Other complexity measure of the structure of quasivariety lattices is expressed by the concept of Q -universality. It means that the quasivariety lattice for any quasivariety of finite signature is a homomorphic image of some sublattice of the considered Q -universal lattice of quasivarieties. Two years ago it was established a connection between unreasonability and Q -universality; it was also posed the following problem. Does any Q -universal class of algebraic structures of a fixed signature contain a unreasonable subclass? Is there a class of algebraic structures which is not Q -universal but which is nevertheless unreasonable? We find a non-trivial identity holding in quasivariety lattices for the classes of differential groupoids. It is proved that there are continuum many unreasonable classes of the differential groupoids which are not Q -universal.

Key words: quasivariety lattice, unreasonability, Q -universality.

1 Введение

Одной из известных проблем универсальной алгебры и теории решеток является вопрос о том, какие решетки изоморфны решеткам квазимногообразий. Эта проблема была поставлена в 1945 году Г. Биркгофом (Birkhoff, 1946: 310) и, независимо, в 1966 году А.И. Мальцевым (Мальцев, 1968: 217) и является актуальной по настоящее время. Описание решеток, изоморфных решеткам квазимногообразий, получено для ряда конкретных классов решеток (например, для алгебраических точечных решеток (Горбунов, 1999, 294–299), для конечных дистрибутивных решеток (Туманов, 1983: 168–181)). Нахождение решения проблемы Биркгофа-Мальцева в самой общей ее постановке представляется исключительно сложной задачей. Утверждать это позволяет ряд результатов о сложности строения решеток квазимногообразий, полученных к настоящему времени, см. (Adams, 2004: 357–378), (Nurakunov, 2012a: 3, 10–12, 14), (Нуракунов, 2014: 395–399), (Швидефски, 2015: 392, 393–395), а также (Горбунов, 1999: 271–274, 291–300). Тем не менее, изучение проблемы Биркгофа-Мальцева для конкретных классов алгебраических систем представляет интерес и заслуживает внимания.

В настоящей работе продолжено изучение сложности строения решеток квазимногообразий. Объектом исследования являются решетки (относительных) квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов, а предметом исследования — сложность этих решеток, которая характеризуется с различных точек зрения. А именно, рассматриваются две меры сложности строения решеток квазимногообразий: иррациональность (или невычислимость множества всех их конечных подрешеток) и Q -универсальность.

Решетка квазимногообразий $Lq(\mathbf{K})$ для класса $\mathbf{K}$ алгебраических систем фиксированной сигнатуры называется иррациональной, если множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $Lq(\mathbf{K})$ невычислимо, т. е. не существует алгоритма,

который по заданной конечной решетке определял бы, вложима эта решетка в рассматриваемую решетку квазимногообразий $Lq(\mathbf{K})$ или нет. В этом случае сам класс $\mathbf{K}$ тоже будем называть иррациональным. Эта концепция сложности строения решеток квазимногообразий была введена К. Херрманном в 2007 году и развита в работах А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012a: 1–17), (Nurakunov, 2012b: 391–393), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 395–399). Первые примеры иррациональных квазимногообразий (а именно, квазимногообразия унарных и точечных абелевых групп) были построены им же в работах (Nurakunov, 2012a: 3, 10–12, 14), (Нуракунов, 2014: 393, 395–399). Существование иррациональных квазимногообразий говорит о том, что решетки квазимногообразий могут иметь чрезвычайно сложное строение.

Другая мера сложности строения решеток квазимногообразий была введена М.В. Сапиром в 1985 г. в работе (Sapir, 1985: 172) и выражается понятием Q -универсальности. Согласно М.В. Сапиру, квазимногообразие $\mathbf{K}$ является Q -универсальным, если для любого квазимногообразия $\mathbf{K}'$ конечной сигнатуры решетка $Lq(\mathbf{K}')$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки в решетке $Lq(\mathbf{K})$ (Sapir, 1985: 172). В этом случае решетка квазимногообразий $Lq(\mathbf{K})$ также называется Q -универсальной; она не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству. Сейчас известно очень много различных Q -универсальных квазимногообразий и число таких примеров постоянно растет, см. обзорную работу (Adams, 2004: 357–378), а также (Горбунов, 1999: 271–274).

Классы (квазимногообразия) дифференциальных группоидов изучались в работе (Schwede, 2014: 1111–1117), см. также работы А.В. Кравченко (Kravchenko, 2008: 11–17), (Кравченко, 2009: 26–39), (Кравченко, 2012a: 89–99), (Кравченко, 2012b: 201–207). Дифференциальным группоидом называется алгебра с одной бинарной операцией, удовлетворяющая тождествам (символ $\cdot$ обозначает бинарную операцию):

1. $\forall x [x \cdot x = x]$
2. $\forall x \forall y \forall z \forall t [(x \cdot y) \cdot (z \cdot t) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot t)]$
3. $\forall x \forall y [x \cdot (x \cdot y) = x]$

В работе (Schwede, 2014: 1116) было показано, что существует иррациональный класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, а в работе (Kravchenko, 2008: 13) доказана Q -универсальность класса дифференциальных группоидов. Также, в работе (Schwede, 2014: 1121) было доказано, что класс $\mathbf{K}$ всех систем сигнатуры σ является Q -универсальным тогда и только тогда, когда он содержит иррациональный подкласс $\mathbf{K}'$, т.е. такой подкласс $\mathbf{K}'$, что множество всех конечных подрешеток решетки $Lq(\mathbf{K}')$ невычислимо. Таким образом, была установлена связь между двумя рассмотренными выше мерами сложности. Вследствие чего, возникла следующая проблема (Schwede, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Верно ли, что любой Q -универсальный класс $\mathbf{K}$ систем фиксированной сигнатуры содержит иррациональный подкласс? Существует ли иррациональный класс $\mathbf{K}$, не являющийся Q -универсальным? Ответ на первый вопрос был дан в работе (Швидефски, 2015: 392).

Автором найдены примеры не Q -универсальных классов алгебраических систем, для которых множества всех конечных подрешеток их решеток квазимногообразий невычислимы. А именно, доказано существование континуума иррациональных классов дифференциальных группоидов, не являющихся Q -универсальными, см. теоремы 2 и 3.

2 Обзор литературы

Вопрос о том, какие решетки изоморфны решеткам квазимногообразий, поставлен в работах (Birkhoff, 1946: 310), (Мальцев, 1968: 217). В настоящее время эту проблему называют проблемой Биркгофа-Мальцева; результаты и обсуждения, касательно данной проблемы, см. в (Adams, 2004: 357–378), (Швидефски, 2015: 382–383, 393–395), (Горбунов, 1999: 271–274, 291–300).

Изучению свойств решеток, изоморфных решеткам квазимногообразий алгебраических систем, посвящено огромное количество работ, см. библиографию в настоящей работе и в (Adams, 2004: 372–378), (Швидефски, 2015: 382–383, 395–398), (Горбунов, 1999: 339–365). Среди них можно отметить работы А.И. Мальцева (Мальцев, 1970: 385), Г. Гретцера (Gratzer, 1978: 415–417), В.А. Горбунова (Горбунов, 1995а: 142–168), (Горбунов, 1995б: 369–397), (Горбунов, 1995в: 646–666), (Горбунов, 1999: 349–351), В.И. Туманова (Туманов, 1983: 168–181), (Горбунов, 1982: 12–44), М. Адамса и В. Дзебяка (Adams, 2004: 357–378), (Adams, 1994а: 1053–1059), (Adams, 1994б: 181–210), (Adams, 1994в: 15–28), (Adams, 2001: 253–283), (Adams, 2002а: 7–11), (Adams, 2002б: 333–356), М.В. Сапира (Sapir, 1985: 172–180), А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012а: 1–17), (Nurakunov, 2012б: 391–393), (Nurakunov, 2012в: 167–179), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 372–400), А.В. Кравченко (Kravchenko, 2002: 311–325), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Kravchenko, 2016: 388–394), (Кравченко, 2001: 113–127), (Кравченко, 2009: 26–39), (Кравченко, 2012а: 89–99), (Кравченко, 2012б: 201–207), М.В. Швидефски (Schwidefsky, 2014: 1099–1126), (Швидефски, 2015: 381–398), (Семенова, 2012: 1111–1132) и других.

В настоящее время существует несколько подходов к понятию сложности решеток квазимногообразий. Понятие Q -универсальной решетки квазимногообразий введено в работе (Sapir, 1985: 172), где также была доказана Q -универсальность квазимногообразия, порожденного одной полугруппой. Примеры Q -универсальных классов алгебраических систем можно найти в работах (Adams, 2004: 357–378), (Швидефски, 2015: 393–395), (Adams, 1994а: 1053–1059), (Adams, 2001: 253–283), (Adams, 2002б: 333–356), (Kravchenko, 2002: 311–325), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Нуракунов, 2014: 372–400), (Schwidefsky, 2014: 1124), (Sheremet, 2001: 193–201), (Горбунов, 1999: 271–274) и других. В работе М.Е. Адамса и В. Дзебяка (Adams, 1994а: 1056) найдены достаточные условия Q -универсальности; эти условия получили обобщение в работе (Швидефски, 2015: 391). Кроме того, была установлена взаимосвязь между сигнатурой σ и наличием у класса $\mathbf{K}(\sigma)$ всех систем этой сигнатуры свойства Q -универсальности. А именно, класс $\mathbf{K}(\sigma)$ является Q -универсальным тогда и только тогда, когда σ содержит либо по крайней мере бинарный предикатный символ, либо по крайней мере унарный функциональный символ, либо σ является, по крайней мере, счетной, см. рукопись В. Дзебяка (Dziobiak, 1997: proposition 4.4) и работу (Schwidefsky, 2014: 1121–1123).

Понятие иррациональной решетки дано в работе (Nurakunov, 2012а: 2). Примеры классов, для которых множества всех конечных подрешеток их решеток квазимногообразий невычислимы, были построены в работах (Nurakunov, 2012а: 3, 10–12, 14), (Nurakunov, 2012б: 391–393), (Nurakunov, 2012в: 168–170), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 393, 395–399), (Schwidefsky, 2014: 1110–1111, 1116–1117, 1119–1120), (Семенова, 2012: 1129–1131). Взаимосвязь между Q -универсальностью класса $\mathbf{K}(\sigma)$ всех систем сигнатуры σ и существованием у него иррационального подкласса установлена

в работе (Schwidersky, 2014: 1121).

Вопросы о том, верно ли, что любой Q -универсальный класс $\mathbf{K}$ систем фиксированной сигнатуры содержит иррациональный подкласс; и о существовании иррационального класса $\mathbf{K}$, не являющегося Q -универсальным, поставлены в работах (Schwidersky, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Положительный ответ на первый вопрос для почти всех известных к настоящему моменту Q -универсальных квазимногообразий дан в работе (Швидефски, 2015: 392).

Классы дифференциальных группоидов рассматривались в работах (Schwidersky, 2014: 1111–1117), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Кравченко, 2009: 26–39), (Кравченко, 2012а: 89–99), (Кравченко, 2012б: 201–207). Имеется результат о существовании класса $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, для которого множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $L_q(\mathbf{K})$ невычислимо (Schwidersky, 2014: 1116–1117). Q -универсальность класса дифференциальных группоидов доказана в работе (Kravchenko, 2008: 13). Таким образом, выполненный обзор опубликованных на сегодняшний день статей (и других источников, см. библиографию к настоящей работе) по теме исследования свидетельствует об отсутствии в изученной литературе факта о существовании иррациональных и одновременно не Q -универсальных классов дифференциальных группоидов.

Отметим также, что нетривиальное теоретико-решеточное тождество H_n , $n \in \mathbb{Z}^+$ было рассмотрено в работе (Semenova, 2003: 554, 556).

3 Материал и методы

Напомним некоторые основные понятия и общепринятые обозначения из теории решеток и универсальной алгебры. За всеми понятиями, здесь не определенными, мы отсылаем читателя к книгам В.А. Горбунова (Горбунов, 1999: 1–69, 93–109, 125–138, 205–300), А.И. Мальцева (Мальцев, 1970: 9–88, 129–137, 183–189, 267–299), см. также А.В. Кравченко (Кравченко, 2011: 7–73), S. Burris, Н.Р. Sankaranarayanan (Burris, 1981: 5–110), G. Grätzer (Grätzer, 1978: 15–52).

Для нижней полурешетки с наибольшим элементом $\mathcal{L} = \langle L; \wedge; 1 \rangle$ обозначим через $S_\wedge(\mathcal{L})$ решетку всех нижних подполурешеток в $\mathcal{L}$, содержащих $1_{\mathcal{L}}$. Для любых двух подполурешеток $L_0, L_1 \in S_\wedge(\mathcal{L})$ множество $L_0 + L_1 = \{l_0 \wedge l_1 \mid l_0 \in L_0, l_1 \in L_1\}$ является наименьшей нижней подполурешеткой в $\mathcal{L}$, содержащей $L_0 \cup L_1$; т. е. решеточным объединением L_0 и L_1 в $S_\wedge(\mathcal{L})$.

Все рассматриваемые классы алгебраических систем мы считаем абстрактными (Горбунов, 1999: 6), (Мальцев, 1970: 207), т. е. замкнутыми относительно изоморфизмов. Обозначим через $\mathbf{K}(\sigma)$ класс всех систем сигнатуры σ ; через $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ класс всех систем из $\mathbf{K}(\sigma)$, изоморфных подсистемам систем из $\mathbf{K}$ (Горбунов, 1999: 24). Пусть $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$. Тогда $\mathbf{K}'$ называется $\mathbf{K}$ -квазиэквивалентным, если $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \text{Mod}(\Sigma)$ для некоторого множества Σ квазитожеств сигнатуры σ (Горбунов, 1999: 117). Очевидно, $\mathbf{K}'$ является $\mathbf{K}$ -квазиэквивалентным ($\mathbf{K}$ -квазимногообразием или относительным квазимногообразием), тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{Q}(\mathbf{K}')$, где $\mathbf{Q}(\mathbf{K}')$ — наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathbf{K}'$ (Швидефски, 2015: 384). Множество всех $\mathbf{K}$ -квазиэквивалентных подклассов, упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется решеткой квазимногообразий для $\mathbf{K}$ или просто решеткой относительных квазимногообразий, когда $\mathbf{K}$ легко восстанавливается из контекста, и

обозначается $Lq(\mathbf{K})$ (Горбунов, 1999: 205), (Швидефски, 2015: 384).

При доказательстве основного результата используются методы универсальной алгебры и теории решеток: в частности, метод построения классов, обладающих определенными свойствами, развитый в работах А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012a: 1–17), (Nurakunov, 2012b: 167–179), (Нуракунов, 2014: 372–400), и теоретико-решеточные методы из работ (Schwedefsky, 2014: 1099–1126), (Семенова, 2012: 1111–1132), (Швидефски, 2015: 381–398). Нам потребуются достаточное условие невычислимости множества всех конечных подрешеток данной решетки (Нуракунов, 2014: 396, утверждение 5.2), и утверждение о существовании класса дифференциальных группоидов (Schwedefsky, 2014: 1115, proposition 4.9).

Лемма 1 (Нуракунов, 2014: 396, утверждение 5.2) Пусть $\mathbf{L}$ и $\mathbf{F}$ — множества, первое из которых вычислимо. Если множество $\mathbf{L} \cap \mathbf{F}$ невычислимо, то множество $\mathbf{F}$ также невычислимо.

Заметим, что запись $\mathcal{A} \leq_s \prod_{n \in N} \mathcal{A}_n$ означает, что система $\mathcal{A}$ является подпрямым произведением семейства систем $\mathcal{A}_n$, $n \in N$. Через ω мы обозначаем множество натуральных чисел.

Теорема 1 (Schwedefsky, 2014: 1115, proposition 4.9) Пусть $\mathcal{K}_n$ — конечная нетривиальная решетка для любого $n \in N \subseteq \omega$. Тогда существует класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, такой что $Lq(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n \in N} S_{\wedge}(\mathcal{K}_n)$.

Дополнительно, будем использовать две леммы из работы А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012a: 13, lemmas 17, 18) о свойствах решеток $S_{\wedge}(\mathcal{L}_n)$, где $\mathcal{L}_n$ (для любого $2 < n < \omega$) — конечная нижняя полурешетка с наибольшим элементом типа “корона”.

Лемма 2 (Nurakunov, 2012a: 13, lemma 17) Решетка $S_{\wedge}(\mathcal{L}_n)$ подпрямно неразложима для любого $2 < n < \omega$.

Лемма 3 (Nurakunov, 2012a: 13, lemma 18) Решетка $S_{\wedge}(\mathcal{L}_n)$ вложима в $S_{\wedge}(\mathcal{L}_m)$ тогда и только тогда, когда $n = m$ (для любых $2 < n, m < \omega$).

Также нам потребуется лемма (Semenova, 2003: 554, lemma 5.2) о выполнимости определенных неравенств в решетках.

В следующем пункте мы доказываем основные теоремы 2 и 3. В теореме 2 утверждается существование иррационального класса $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, который, тем не менее, не является Q -универсальным. Заметим, что теорема 2 доказывается без привлечения методологии AD -классов. Схема доказательства теоремы 2 следующая. Сначала, используя теорему 1, показываем, что существует класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, такой что $Lq(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n \in N} S_{\wedge}(\mathcal{L}_n)$. Затем, используя лемму 1, устанавливаем, что этот класс $\mathbf{K}$ является иррациональным, т. е. множество всех конечных подрешеток решетки $Lq(\mathbf{K})$ невычислимо. Далее доказываем, что решетка $\prod_{n \in N} S_{\wedge}(\mathcal{L}_n)$ удовлетворяет нетривиальному решеточному тождеству H_3 (определено ниже, в ходе доказательства теоремы 2). Тогда, это тождество будет выполняться и на решетке $Lq(\mathbf{K})$, поскольку тождества устойчивы относительно перехода к подсистемам (Мальцев, 1970: 189). Следовательно, класс $\mathbf{K}$ не будет Q -универсальным, т. к. хорошо известно, что

Q -универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству (Горбунов, 1999: 273).

В теореме 3 утверждается существование континуума иррациональных классов $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, не являющихся Q -универсальными. При доказательстве этой теоремы используется факт о том, что число подмножеств счетного множества, являющихся невычислимыми, континуально; с учетом которого, утверждение теоремы 3 будет следовать из теоремы 2.

4 Результаты и обсуждение

Теорема 2 *Существует иррациональный класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, не являющийся Q -универсальным.*

Доказательство теоремы 2. Пусть множество $N \subseteq \omega \setminus \{0, 1, 2\}$ невычислимо и $\{\mathcal{L}_n \mid n \in N\}$ — класс конечных нижних полурешеток с наибольшим элементом типа “корона” (см. рис. 1).

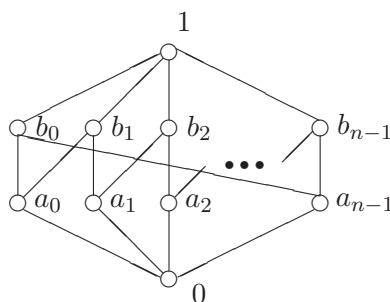


Рисунок 1 – “Корона” $\mathcal{L}_n$

Согласно теореме 1, примененной к классу $\{\mathcal{L}_n \mid n \in N\}$, существует класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, такой что $\text{Lq}(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{L}_n)$.

Решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ подпрямой неразложима для любого $n > 2$, согласно лемме 2. Решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ вложима в $S_\wedge(\mathcal{L}_m)$ тогда и только тогда, когда $n = m$ (для любых $n, m > 2$), согласно лемме 3. Пусть $\mathbf{L} = \{S_\wedge(\mathcal{L}_n) \mid n > 2\}$ и $\mathbf{M} = \{S_\wedge(\mathcal{L}_n) \mid n \in N\}$. Решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_m)$ вложима $\prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ в точности тогда, когда $m \in N$, и, следовательно, решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_m)$ вложима в $\text{Lq}(\mathbf{K})$ тогда и только тогда, когда $m \in N$, т. е. $S_\wedge(\mathcal{L}_m) \in \mathbf{M}$. Тогда, $\mathbf{M} = \mathbf{L} \cap \mathbf{S}(\text{Lq}(\mathbf{K}))$. Значит, решетка $\text{Lq}(\mathbf{K})$ такова, что множество всех ее конечных подрешеток невычислимо, согласно лемме 1.

Далее покажем, что решетка $\prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ удовлетворяет нетривиальному тождеству H_3 . Отметим, что тождество H_n было рассмотрено в работе (Semenova, 2003: 554, 556) и имеет вид:

$$U_n = \bigvee_{0 \leq i \leq n-1} V_{i,n} \vee \bigvee_{0 \leq i \leq n-2} W_{i,n},$$

где решеточные термы от переменных $x_0, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
U_n &= U_{0,n} \\
U_{n,n} &= x_n \\
U_{i,n} &= x_i \wedge (U_{i+1,n} \vee x'_{i+1}), & 0 \leq i \leq n-1 \\
V_{i,n} &= V_{i,0,n}, & 0 \leq i \leq n-1 \\
V_{i,i,n} &= (x_i \wedge U_{i+1,n}) \vee (x_i \wedge x'_{i+1}), & 0 \leq i \leq n-1 \\
V_{i,j,n} &= x_j \wedge (V_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), & 0 \leq j < i \leq n-1 \\
W_{i,n} &= W_{i,0,n}, & 0 \leq i \leq n-2 \\
W_{i,i,n} &= x_i \wedge (x'_{i+1} \vee x'_{i+2}) \wedge ((U_{i+1,n} \wedge (x_i \vee x'_{i+2})) \vee x'_{i+1}), & 0 \leq i \leq n-2 \\
W_{i,j,n} &= x_j \wedge (W_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), & 0 \leq j < i \leq n-2.
\end{aligned}$$

Если $n = 3$, то тождество H_3 запишется так:

$$U_3 = \bigvee_{0 \leq i \leq 2} V_{i,3} \vee \bigvee_{0 \leq i \leq 1} W_{i,3}$$

или

$$U_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3}),$$

где решеточные термы имеют вид:

$$\begin{aligned}
U_3 &= U_{0,3}, \\
U_{0,3} &= x_0 \wedge (U_{1,3} \vee x'_1), \\
U_{1,3} &= x_1 \wedge (U_{2,3} \vee x'_2), \\
U_{2,3} &= x_2 \wedge (U_{3,3} \vee x'_3), \\
U_{3,3} &= x_3. \\
V_{0,3} &= V_{0,0,3}, \\
V_{0,0,3} &= (x_0 \wedge U_{1,3}) \vee (x_0 \wedge x'_1). \\
V_{1,3} &= V_{1,0,3}, \\
V_{1,0,3} &= x_0 \wedge (V_{1,1,3} \vee x'_1), \\
V_{1,1,3} &= (x_1 \wedge U_{2,3}) \vee (x_1 \wedge x'_2). \\
\text{Тогда } V_{1,3} &= x_0 \wedge ((x_1 \wedge U_{2,3}) \vee (x_1 \wedge x'_2)) \vee x'_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,3} &= V_{2,0,3}, \\
V_{2,0,3} &= x_0 \wedge (V_{2,1,3} \vee x'_1), \\
V_{2,1,3} &= x_1 \wedge (V_{2,2,3} \vee x'_2), \\
V_{2,2,3} &= (x_2 \wedge U_{3,3}) \vee (x_2 \wedge x'_3). \\
\text{Тогда } V_{2,3} &= x_0 \wedge ((x_1 \wedge ((x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x'_3)) \vee x'_2)) \vee x'_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{0,3} &= W_{0,0,3}, \\
W_{0,0,3} &= x_0 \wedge (x'_1 \vee x'_2) \wedge ((U_{1,3} \wedge (x_0 \vee x'_2)) \vee x'_1). \\
W_{1,3} &= W_{1,0,3},
\end{aligned}$$

$$W_{1,0,3} = x_0 \wedge (W_{1,1,3} \vee x'_1),$$

$$W_{1,1,3} = x_1 \wedge (x'_2 \vee x'_3) \wedge ((U_{2,3} \wedge (x_1 \vee x'_3)) \vee x'_2).$$

Обозначим

$$V_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3}).$$

Тогда H_3 , выполнимость которого следует проверить, примет вид: $U_3 = V_3$.

Сначала покажем, что решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ для любого $n \in N$ удовлетворяет тождеству H_3 . Согласно (Semenova, 2003: 554, lemma 5.2), следующие неравенства выполняются в каждой решетке ($n \in Z^+$):

$$V_{i,n} \leq U_n, (0 \leq i \leq n-1); \quad W_{i,n} \leq U_n, (0 \leq i \leq n-2).$$

Если $n = 3$, то $V_{i,3} \leq U_3, (0 \leq i \leq 2); \quad W_{i,3} \leq U_3, (0 \leq i \leq 1)$.

Тогда $V_3 \leq U_3$. Осталось доказать, что $U_3 \leq V_3$. Все переменные (термы) $x_0, x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$ интерпретируем как подполурешетки "короны" $\mathcal{L}_n$, содержащие наибольший элемент $1_{\mathcal{L}_n}$, — соответственно $X_0, X_1, X_2, X_3, X'_1, X'_2, X'_3$.

Пусть произвольно взятый элемент $a_0 \in L_n \setminus \{1_{\mathcal{L}_n}\}$ лежит в U_3 . Заметим, что если в качестве a_0 взять наибольший элемент $1_{\mathcal{L}_n}$, то включение $U_3 \leq V_3$, очевидно, будет выполняться, поскольку все рассматриваемые подполурешетки "короны" $\mathcal{L}_n$ содержат $1_{\mathcal{L}_n}$. В дальнейшем вместо $a_0 \in L_n \setminus \{1_{\mathcal{L}_n}\}$ будем использовать запись $a_0 \in L_n$.

Тогда a_0 , с одной стороны, лежит в X_0 , которая является подполурешеткой в $\mathcal{L}_n$, а, с другой стороны, — в $U_{1,3} + X'_1$. Если элемент $a_0 \in L_n$ лежит в $U_{1,3} + X'_1$, то найдутся элементы $a_1 \in U_{1,3}$ и $b_1 \in X'_1$, такие что $a_0 = a_1 \wedge b_1$. Если $a_0 = a_1$ или $a_0 = b_1$, то $a_0 \in (X_0 \cap U_{1,3}) \cup (X_0 \cap X'_1)$. Таким образом, $a_0 \in L_n$ лежит в $V_{0,3}$, а, следовательно, принадлежит V_3 .

Если пересечение строгое: $a_0 = a_1 \wedge b_1, a_0 < a_1, a_0 < b_1$, то из условия $a_1 \in U_{1,3}$ следует, что элемент a_1 , с одной стороны, лежит в X_1 , которая является подполурешеткой в $\mathcal{L}_n$, а, с другой стороны, — в $U_{2,3} + X'_2$. Если элемент a_1 лежит в $U_{2,3} + X'_2$, то найдутся элементы $a_2 \in U_{2,3}$ и $b_2 \in X'_2$, такие что $a_1 = a_2 \wedge b_2$. Если $a_1 = a_2$ или $a_1 = b_2$, то $a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X'_2)$. Тогда, если $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X'_2)$ и $b_1 \in X'_1$, то элемент $a_0 \in L_n$ лежит в $V_{1,3}$, а, следовательно, принадлежит V_3 .

Если вновь пересечение строгое: $a_1 = a_2 \wedge b_2, a_1 < a_2, a_1 < b_2$, то из условия $a_2 \in U_{2,3}$, следует, что элемент a_2 , с одной стороны, лежит в X_2 , которая является подполурешеткой в $\mathcal{L}_n$, а, с другой стороны, — в $X_3 + X'_3$. Если элемент a_2 лежит в $X_3 + X'_3$, то найдутся элементы $a_3 \in X_3$ и $b_3 \in X'_3$, такие, что $a_2 = a_3 \wedge b_3$. Если $a_2 = a_3$ или $a_2 = b_3$, то $a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X'_3)$. Тогда, если $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $b_1 \in X'_1$, а $a_1 \in X_1$ и $a_1 = a_2 \wedge b_2$, где $a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X'_3)$, $b_2 \in X'_2$, то элемент $a_0 \in L_n$ лежит в $V_{2,3}$, а, следовательно, принадлежит V_3 .

Когда пересечение строгое: $a_2 = a_3 \wedge b_3, a_2 < a_3, a_2 < b_3$, получим, что $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $b_1 \in X'_1$, а $a_1 \in X_1$ и $a_1 = a_2 \wedge b_2$, где $b_2 \in X'_2$, $a_2 \in X_2$ и $a_2 = a_3 \wedge b_3$, где $a_3 \in X_3$ и $b_3 \in X'_3$. Представим этот случай на диаграмме. Получим цепь $a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - 1_{\mathcal{L}_n}$ ($a_0 < a_1, a_1 < a_2, a_2 < a_3$) длины 4 (см. рис. 2), что противоречит тому, что в "короне" $\mathcal{L}_n$ длина максимальной цепи равна 3.

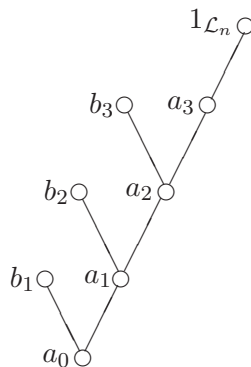


Рисунок 2 – Получившаяся цепь длины четыре в “короне” $\mathcal{L}_n$

Таким образом, неравенство $U_3 \leq V_3$ имеет место. Следовательно, тождество H_3 выполняется на $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ для любого $n \in N$. Тогда $\prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ тоже будет удовлетворять H_3 , поскольку тождества мультипликативно устойчивы (Мальцев, 1970: 189). Значит, H_3 будет выполняться и на $Lq(\mathbf{K})$, поскольку тождества устойчивы относительно перехода к подсистемам (Мальцев, 1970: 189). Известно (Горбунов, 1999: 273), что Q -универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству. Поэтому класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов не будет Q -универсальным. Теорема 2 доказана.

Теорема 3 *Существует континуум иррациональных классов $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, не являющихся Q -универсальными.*

Доказательство теоремы 3. Утверждение данной теоремы следует из теоремы 2 и из того факта, что число подмножеств $N \subseteq \omega \setminus \{0, 1, 2\}$ счетного множества $\omega \setminus \{0, 1, 2\}$, являющихся невычислимыми, континуально. Теорема 3 доказана.

В литературе есть примеры иррациональных классов (Nurakunov, 2012a: 3, 10–12, 14), (Nurakunov, 2012b: 391–393), (Nurakunov, 2012в: 168–170), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 393, 395–399), (Schwedeisky, 2014: 1110–1111, 1116–1117, 1119–1120), (Семенова, 2012: 1129–1131), очень много примеров Q -универсальных классов алгебраических систем (Adams, 2004: 357–378), (Швидефски, 2015: 393–395), (Adams, 1994a: 1053–1059), (Adams, 2001: 253–283), (Adams, 2002b: 333–356), (Kravchenko, 2002: 311–325), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Нуракунов, 2014: 372–400), (Schwedeisky, 2014: 1124), (Sheremet, 2001: 193–201), (Горбунов, 1999: 271–274); ставился вопрос, влечет ли наличие у класса свойства Q -универсальности его иррациональность, и наоборот (Schwedeisky, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Теоремы 2 и 3, доказанные выше, указывают на факт о существовании иррациональных решеток квазимногообразий, которые, однако, не являются Q -универсальными. Таким образом, найдены решетки квазимногообразий, которые, согласно одной мере, являются сложными, а, согласно другой мере сложности, — нет. Результат теорем 2 и 3 представляют интерес для специалистов по теории квазимногообразий.

5 Заключение

Вопрос о сложности строения производных решеток, в частности решеток квазимногообразий, изучался многими авторами (см., например, библиографию в настоящей работе и в (Adams, 2004: 372–378), (Швидефски, 2015: 395–398), (Горбунов, 1999: 339–365)) и отчасти является философским. Где лежит грань между сложным и несложным? Что считать сложностью решетки квазимногообразий? Хорошо известны две меры сложности строения решеток квазимногообразий: Q -универсальность и иррациональность (невычислимость множества всех их конечных подрешеток). Отметим, что наличие в решетках квазимногообразий континуума так называемых «плохих» элементов, т. е. элементов, не имеющих покрытий, также говорит о сложности строения этих решеток; в этом случае существует континуум подквазимногообразий данного квазимногообразия K , не имеющих независимого базиса квазитождеств относительно K .

Автором изучается вопрос о связи двух свойств решеток квазимногообразий, характеризующих с различных точек зрения сложность строения таких решеток. Первое из них, Q -универсальность, свидетельствует о максимальной сложности в теоретико-решеточном смысле, а второе, иррациональность (невычислимость множества всех конечных подрешеток решеток квазимногообразий), говорит об алгоритмической сложности. Естественным представляется вопрос о существовании классов, обладающих одним из этих свойств, но не обладающих другим. Ранее (Швидефски, 2015: 392) установлено, что для почти любого Q -универсального квазимногообразия можно найти иррациональный подкласс и поставлен вопрос о существовании иррационального класса, не являющегося Q -универсальным (Schwede, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Автором показано, что существует континуум классов дифференциальных группоидов, таких, что решетки квазимногообразий для этих классов являются иррациональными (т. е. сложными согласно одной мере сложности), но, при этом, не являются Q -универсальными. Таким образом, установлено, что, наличие у решетки квазимногообразий для рассматриваемых классов одного из упомянутых выше свойств (а именно, иррациональности) не является необходимым и достаточным условием сложности решетки согласно концепции Q -универсальности. Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть применены в дальнейших исследованиях в области универсальной алгебры.

Список литературы

- [1] Adams M.E., Adaricheva K.V., Dziobiak W., Kravchenko A.V. Open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev // Stud. Log. — 2004. — Vol. 78. — P. 357–378.
- [2] Adams M.E., Dziobiak W. Q -universal quasivarieties of algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 120, no. 4. — P. 1053–1059.
- [3] Adams M.E., Dziobiak W. Lattice of quasivarieties of 3-element algebras // J. Algebra. — 1994. — Vol. 166, no. 1. — P. 181–210.
- [4] Adams M.E., Dziobiak W. Quasivarieties of distributive lattices with a quantifier // Discrete Math. — 1994. — Vol. 135. — P. 15–28.
- [5] Adams M.E., Dziobiak W. Finite-to-finite universal quasivarieties are Q -universal // Algebra Universalis. — 2001. — Vol. 46. — P. 253–283.
- [6] Adams M.E., Dziobiak W. The lattice of quasivarieties of undirected graphs // Algebra Univers. — 2002. — Vol. 47, no. 1. — P. 7–11.

-
- [7] Adams M.E., Dziobiak W. *Q*-universal varieties of bounded lattices // *Algebra Univers.* — 2002. — Vol. 48, no. 3. — P. 333–356.
- [8] Birkhoff G. *Universal algebra* // *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945)*. — Toronto: the University of Toronto Press., 1946. — P. 310–326.
- [9] Burris S., Sankappanavar H.P. *A course in universal algebra*. — New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verl., 1981. — 315 p.
- [10] Dziobiak W. *Selected topics in quasivarieties of algebraic systems: manuscript*. — 1997.
- [11] Grätzer G. *General lattice theory*. — Berlin: Akademie-Verlag, 1978. — 456 p.
- [12] Kravchenko A.V. *Q*-universal quasivarieties of graphs // *Algebra and Logic*. — 2002. — Vol. 41, no. 3. — P. 311–325.
- [13] Kravchenko A.V. On the lattices of quasivarieties of differential groupoids // *Comment. Math. Univ. Carolin.* — 2008. — Vol. 49, no. 1. — P. 11–17.
- [14] Kravchenko A.V. Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II // *Sib. electron. mathem. rep.* — 2016. — Vol. 13. — P. 388–394.
- [15] Nurakunov A.M. Unreasonable lattices of quasivarieties // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2012. — Vol. 22, no. 3. — P. 1–17.
- [16] Nurakunov A.M., Imanaliev M.I. Complexity of quasivariety lattices of pointed Abelian Groups // *Doklady Mathematics*. — 2012. — Vol. 85, no. 3. — P. 391–393.
- [17] Nurakunov A.M., Semenova M.V., Zamojska-Dzienio A. On lattices connected with various types of classes of algebraic structures // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. — 2012. — Т. 154. — С. 167–179.
- [18] Sapir M.V. The lattice of quasivarieties of semigroups // *Algebra Universalis*. — 1985. — Vol. 21. — P. 172–180.
- [19] Schwedfsky M.V., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. II // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2014. — Vol. 24, no. 8. — P. 1099–1126.
- [20] Semenova M.V., Wehrung F. Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2003. — Vol. 13, no. 5. — P. 543–564.
- [21] Sheremet M.S. Quasivarieties of Cantor algebras // *Algebra Universalis*. — 2001. — Vol. 46. — P. 193–201.
- [22] Горбунов В.А. Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. I // *Алгебра и логика*. — 1995. — Т. 34, № 2. — С. 142–168.
- [23] Горбунов В.А. Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. II // *Алгебра и логика*. — 1995. — Т. 34, № 4. — С. 369–397.
- [24] Горбунов В.А. Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. III // *Алгебра и логика*. — 1995. — Т. 34, № 6. — С. 646–666.
- [25] Горбунов В.А. *Алгебраическая теория квазимногообразий*. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 368 с.
- [26] Горбунов В.А., Туманов В.И. Строение решеток квазимногообразий // *Тр. Ин-та математики СО АН СССР*. — 1982. — Т. 2. — С. 12–44.
- [27] Кравченко А.В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий унарных алгебр // *Матем. тр.* — 2001. — Т. 4, № 2. — С. 113–127.
- [28] Кравченко А.В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий дифференциальных группоидов // *Матем. тр.* — 2009. — Т. 12, № 1. — С. 26–39.
- [29] Кравченко А.В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий дифференциальных группоидов. II // *Матем. тр.* — 2012. — Т. 15, № 2. — С. 89–99.
- [30] Кравченко А.В. Минимальные квазимногообразия дифференциальных группоидов с ненулевым умножением // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2012. — Т. 9. — С. 201–207.
- [31] Кравченко А.В., Семенова М.В. *Универсальная алгебра и теория решеток*. — Новосибирск: НГУ, 2011. — 74 с.

- [32] Мальцев А.И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Труды международного математического конгресса (Москва, 1966). — М.: Мир, 1968. — С. 217–231.
- [33] Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.
- [34] Нуракунов А.М. Решетки квазимногообразий точечных абелевых групп // Алгебра и логика. — 2014. — Т. 53, № 3. — С. 372–400.
- [35] Нуракунов А.М., Иманалиев М.И. Сложность решеток квазимногообразий точечных абелевых групп // Доклады академии наук. — 2012. — Т. 444, № 5. — С. 480–482.
- [36] Семенова М.В., Замойска-Дзенио А. О решетках подклассов // Сиб. Мат. Ж. — 2012. — Т. 53, № 5. — Р. 1111–1132.
- [37] Туманов В.И. Конечные дистрибутивные решетки квазимногообразий // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 2. — С. 168–181.
- [38] Швидефски М.В. О сложности решеток квазимногообразий // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54, № 3. — С. 381–398.

References

- [1] Adams, Michael, and Kira Adaricheva, and Wieslaw Dziobiak, and Aleksandr Kravchenko. “Open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev.” *Stud. Log.* 78 (2004): 357–378.
- [2] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “ Q -universal quasivarieties of algebras.” *Proc. Amer. Math. Soc.* 120 (1994): 1053–1059.
- [3] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Lattice of quasivarieties of 3-element algebras.” *J. Algebra* 166 (1994): 181–210.
- [4] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Quasivarieties of distributive lattices with a quantifier.” *Discrete Math.* 135 (1994): 15–28.
- [5] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Finite-to-finite universal quasivarieties are Q -universal.” *Algebra Universalis* 46 (2001): 253–283.
- [6] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “The lattice of quasivarieties of undirected graphs.” *Algebra Universalis* 47 (2002): 7–11.
- [7] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “ Q -universal varieties of bounded lattices.” *Algebra Universalis* 48 (2002): 333–356.
- [8] Birkhoff, Garrett. “Universal algebra.” Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress, Montreal, 1945. *Toronto: the University of Toronto Press* (1946): 310–326.
- [9] Burris, Stanley, and Hanamantagouda P. Sankappanavar. *A course in universal algebra*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verl., 1981.
- [10] Dziobiak, Wieslaw. *Selected topics in quasivarieties of algebraic systems*. Manuscript, 1997.
- [11] Grätzer, George. *General lattice theory*. Berlin: Akademie-Verlag, 1978.
- [12] Kravchenko, Aleksandr. “ Q -universal quasivarieties of graphs.” *Algebra and Logic* 41 (2002): 311–325.
- [13] Kravchenko, Aleksandr. “On the lattices of quasivarieties of differential groupoids.” *Comment. Math. Univ. Carolin.* 49 (2008): 11–17.
- [14] Kravchenko, Aleksandr. “Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II.” *Sib. electron. mathem. rep.* 13 (2016): 388–394.
- [15] Nurakunov, Anvar. “Unreasonable lattices of quasivarieties.” *Internat. J. Algebra Comput.* 22 (2012): 1–17.
- [16] Nurakunov, Anvar, and Murzabek Imanaliev. “Complexity of quasivariety lattices of pointed Abelian Groups.” *Doklady Mathematics* 85 (2012): 391–393.
- [17] Nurakunov, Anvar, and Marina Semenova, and Anna Zamojska-Dzienio. “On lattices connected with various types of classes of algebraic structures.” *Uchenye zapiski kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki* 154 (2012): 167–179.

- [18] Sapir, Mark. "The lattice of quasivarieties of semigroups." *Algebra Universalis* 21 (1985): 172–180.
- [19] Schwidefsky, Marina, and Anna Zamojska-Dzienio. "Lattices of subclasses. II." *Internat. J. Algebra Comput.* 24 (2014): 1099–1126.
- [20] Semenova, Marina, and Friedrich Wehrung. "Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height." *Internat. J. Algebra Comput.* 13 (2003): 543–564.
- [21] Sheremet, Mihail. "Quasivarieties of Cantor algebras." *Algebra Universalis* 46 (2001): 193–201.
- [22] Gorbunov V. (1995) Stroenie reshetok mnogoobrazij i reshetok kvazimnogoobrazij: skhodstvo i razlichie. I [The structure of variety lattices and quasivariety lattices: similarities and differences. I]. *Algebra and Logic*, vol. 34, no 2, pp. 142–168.
- [23] Gorbunov V. (1995) Stroenie reshetok mnogoobrazij i reshetok kvazimnogoobrazij: skhodstvo i razlichie. II [The structure of variety lattices and quasivariety lattices: similarities and differences. II]. *Algebra and Logic*, vol. 34, no 4, pp. 369–397.
- [24] Gorbunov V. (1995) Stroenie reshetok mnogoobrazij i reshetok kvazimnogoobrazij: skhodstvo i razlichie. III [The structure of variety lattices and quasivariety lattices: similarities and differences. III]. *Algebra and Logic*, vol. 34, no 6, pp. 646–666.
- [25] Gorbunov, Viktor. *Algebraic Theory of Quasivarieties*. New York: Plenum, 1998.
- [26] Gorbunov V., Tumanov V. (1982) Stroenie reshetok kvazimnogoobrazij [The structure of quasivariety lattices]. *Tr In-ta matematiki SO AN SSSR*, vol. 2, pp. 12–44.
- [27] Kravchenko A. (2001) slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij dlya mnogoobrazij unarnyh algebr [The complexity of quasivariety lattices for the varieties of unary algebras]. *Matem. tr.*, vol. 4, no. 2, pp. 113–127.
- [28] Kravchenko A. (2009) Slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij dlya mnogoobrazij differencialnyh gruppoidov [The complexity of quasivariety lattices for the varieties of differential groupoids]. *Matem. tr.*, vol. 12, no. 1, pp. 26–39.
- [29] Kravchenko A. (2012) Slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij dlya mnogoobrazij differencialnyh gruppoidov. II [The complexity of quasivariety lattices for the varieties of differential groupoids. II]. *Matem. tr.*, vol. 15, no. 2, pp. 89–99.
- [30] Kravchenko A. (2012) Minimalnye kvazimnogoobraziya differencialnyh gruppoidov s nenulevym umnozheniem [Minimum quasivarieties of differential groupoids with nonzero multiplication]. *Sib. electron. mathem. rep.*, vol. 9, pp. 201–207.
- [31] Kravchenko A., Semenova M. (2011) Universalnaya algebra i teoriya reshetok [Universal algebra and lattice theory]. Новосибирск: НГУ, 74 p.
- [32] Maltsev A. (1968) O nekotoryh pogranychnykh voprosah algebr i matematicheskoy logiki [On some boundary problems of algebra and mathematical logic]. *Trudy mezhdunarodnogo matematicheskogo kongressa (Moskva, 1966)*, M.: Mir, pp. 217–231.
- [33] Maltsev, Anatolij. *Algebraic systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.
- [34] Nurakunov A. (2014) Reshetki kvazimnogoobrazij tochechnykh abelevykh grupp [Quasivariety lattices of pointed Abelian groups]. *Algebra and Logic*, vol. 53, no. 3, pp. 372–400.
- [35] Nurakunov A., Imanaliev M. (2012) Slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij tochechnykh abelevykh grupp [The complexity of quasivariety lattices of pointed Abelian groups]. *Doklady akademii nauk*, vol. 444, no. 5, pp. 480–482.
- [36] Semenova M., Zamojska-Dzienio A. (2012) O reshetkah podklassov [On lattices of subclasses]. *Sib. Mat. Zh.*, vol. 53, no. 5, pp. 1111–1132.
- [37] Tumanov V. (1983) Konechnye distributivnye reshetki kvazimnogoobrazij [Finite distributive lattice of quasivarieties]. *Algebra and logic*, vol. 22, no. 2, pp. 168–181.
- [38] Shvidefski M. (2015) O slozhnosti reshetok kvazimnogoobrazij [On the complexity of quasivariety lattices]. *Algebra and logic*, vol. 54, no. 3, pp. 381–398.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Айсагалиев Серикбай Абдигалиевич* - профессор Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук
2. *Айсагалиева София Серикбаевна* - главный научный сотрудник НИИ математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
3. *Абылкасымова Айжан Болатовна* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби
4. *Ахметов Бахытжан* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби
5. *Айдаров Канат Алхожаевич* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби,
6. *Алматов Абат Жанатович* - студент Казахского национального университета имени аль-Фараби,
7. *Борисов Денис Иванович* - доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Уфимского научного центра РАН, Университет г. Градец Кралове, Градец Кралове, Чешская республика,
8. *Георгиев Александр Георгиев* - старший преподаватель Технического университета-София, Пловдив, Болгария, доцент
9. *Исахов Алибек Абдиалимович* - доцент Казахского национального университета имени аль-Фараби, Ph.D.
10. *Калтаев Айдархан Жусупбекович* - профессор Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор физико-математических наук
11. *Луцак Светлана Михайловна* - докторант Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева
12. *Максимканова Жазира Ауезбеккызы* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
13. *Мукашева Сауле Нурмуханбетовна* - ведущий научный сотрудник ДТОО «Институт ионосферы», кандидат физико-математических наук
14. *Малимбаев Андрей Маратович* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
15. *Попов Румен Констадинов* - старший преподаватель Пловдивского университета «Паисий Хилендарский», Пловдив, Болгария, доцент
16. *Сакабеков Аужан* - профессор Казахского национального исследовательского технического университета имени К.И. Сатпаева, доктор физико-математических наук
17. *Сейтов Абзал Ниязбекулы* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
18. *Самигулина Галина Ахметовна* - заведующая лабораторией Института информационных и вычислительных технологий, доктор технических наук, доцент
19. *Тлеуова Гайни Нурланкызы* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
20. *Шарипова Гульнар* - научный сотрудник ДТОО «Институт ионосферы»

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набранные только в текстовом формате $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat.dairbayeva@gmail.com (ответственному секретарю редколлегии, Даирбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ или формат eps [см. п.7]. Указывается код по УДК. В редакцию также представляется отпечаток работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисуночными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 6 страниц.
Структура статьи.
Первая страница:
 - 1) Первая строка - номер УДК, выравнивание - по левому краю, шрифт - полужирный.
 - 2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
 - 3) Автор(ы) статьи - с указанием имени и фамилии, ученой степени, ученого звания, занимаемой должности, места работы, город, страна, контактный телефон, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
 - 4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.
 - 5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.
 Последующая страница (новая):
 - 6) Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором

аспекте.

7) Материал и Методы - должны состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала - один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

8) В секции обзор литературы - должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

9) В разделе Результаты и Обсуждение - приводится анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) Заключение, выводы - обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50 необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый - в оригинале, второй - романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) – (год в круглых скобках)– название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossiiskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4.(2011): pp. 8-30.

Список литературы представляется в алфавитном порядке, и ТОЛЬКО те работы, которые цитируются в тексте. Стиль оформления списка литературы на русском и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления"(требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления Романизированного списка литературы, а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений - Chicago Style (www.chicagomanualofstyle.org).

В данном разделе необходимо учесть:

- а) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.
- б) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
- в) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
- г) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.

- 12) Ссылки на цитируемые работы в тексте даются в скобках, с указанием первого автора работы, год издания: номер страниц(-ы). Например, (Залесский 1991: 25). В случае, наличия в списке литературы нескольких работ одного и того же автора, изданных в один год, то дополнительно к году издания добавляется буква "а" "б" и т.д. Например, (Садуова, 2001а: 15), (Садуова, 2001б, 22).
6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов L^AT_EX2_ε и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате `.eps`, либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов `Maple`, `Mathematica` или с помощью пакета `Latexcad`. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат `.eps` с помощью `Adobe Photoshop` или конвертера `Conversion Artist`. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ

1-бөлім

Математика

Айсағалиев С.А., Айсағалиева С.С.

Существование решения задачи управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями 3

Borisov D.I.

Initial length scale estimate for the Schrödinger operator with a random fast oscillating potential in a multi-dimensional layer 21

Луцак С.М.

Сложность решеток квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов 32

Sakabekov A., Tleuova G.

The numerical solution of the initial and boundary value problem for one-dimensional nonstationary nonlinear Boltzmann's six-moment system equations with the Vladimirov-Marshak boundary conditions 46

2-бөлім

Механика

Akhmetov B., Seitov A., Popov R., Georgiev A., Kaltayev A.

Experimental and numerical studies of PCM-based storage for solar thermal energy storage applications 55

3-бөлім

Информатика

Aidarov K.A., Almatov A.Zh.

Study of enterprise load balancing algorithms using model-based design 69

Мукашева С.Н., Малимбаев А.М., Шарипова Г.

Требования к геоинформационной системе для сбора, обработки, визуализации и анализа экспериментальных геофизических наземных и спутниковых данных 80

Самигулина Г.А., Масимканова Ж.А.

Онтологические модели алгоритмов роевого интеллекта для иммунносетевого моделирования лекарственных препаратов 92

4-бөлім

Қолданылмалы математика

Исагов А.А., Абылкасымова А. Б.

Свойства переноса воздуха в респираторной системе человека с помощью численного моделирования..... 105

Сведения об авторах 119

К сведению авторов 120

Раздел 1

Математика

Раздел 2

Механика

Раздел 3

Информатика

Раздел 4

Прикладная математика

CONTENTS

Section 1

Mathematics

*Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S.*The existence of a solution of the controllability problem for linear
integral and differential equations with restrictions 3*Borisov D.I.*Initial length scale estimate for the Schrödinger operator with a random fast oscillating potential in a multi-
dimensional layer 21*Lutsak S.M.*

The complexity of quasivariety lattices for the classes of differential groupoids 32

*Sakabekov A., Tleuova G.*The numerical solution of the initial and boundary value problem for one-dimensional nonstationary nonlinear
Boltzmann's six-moment system equations with the Vladimirov-Marshak boundary conditions 46

Section 2

Mechanics

Akhmetov B., Seitov A., Popov, R., Georgiev A., Kaltayev A.

Experimental and numerical studies of PCM-based storage for solar thermal energy storage applications 55

Section 3

Computer science

Aidarov K.A., Almatov A.Zh.

Study of enterprise load balancing algorithms using model-based design 69

*Mukasheva S.N., Malimbayev A.M., Sharipova G.*Requirements for Geoinformatical System for Gathering, Processing, Visualization,
and Analysis of Experimental Geophysical Ground and Satellite Data 80*Samigulina G.A., Massimkanova Zh. A.*

The ontological models of swarm intelligence algorithms for immune network modeling of drugs 92

Section 4

Applied
Mathematics*Issakhov A.A., Abylkassymova A.*

Air transport properties in the human respiratory system by using numerical simulation 105

Сведения об авторах 119

К сведению авторов 120